

Examen de Mécanique des fluides compressibles – 3h

NOM :

Partie 1 : Connaissances Générales

Répondre « Vrai » ou « Faux » et justifier/commenter brièvement si nécessaire

Barème : Réponse juste : 1.5 pt ; Réponse fausse : 0 pt ; Total max : **36 pts**

Sans documents, sans calculatrices

30 minutes max

1. Une onde de Mach :

- a. a toujours le même angle pour un même nombre de Mach, quel que soit le fluide (gaz ou liquide). VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- b. est également appelée caractéristique de Riemann. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. est isentrope. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

2. Dans le cas d'un écoulement isentrope :

- a. température et densité varient dans le même sens. VRAI FAUX

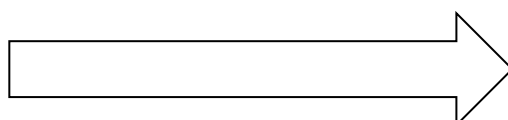
Justification/Commentaire :

- b. il n'y a pas de frottements et pas d'échanges de chaleur. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. la pression totale peut varier. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :



3. Quand un écoulement subsonique entre dans une tuyère convergente-divergente :

- a. l'écoulement accélère puis décélère. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- b. une onde de choc ne peut se produire que dans la partie divergente. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. des ondes de Mach sont toujours présentes dans le divergent. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- d. la vitesse du son varie toujours dans le sens opposé de la vitesse de l'écoulement (quand l'une augmente/diminue, l'autre diminue/augmente). VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- e. le col est toujours subsonique ou à Mach 1, quel que soit le fluide. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

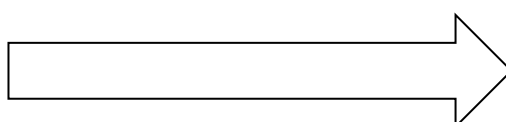
- f. le débit massique est constant le long de la tuyère. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

4. Un choc droit dans un gaz parfait :

- a. ne fait pas varier la température totale. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :



- b. peut être suivi ou précédé d'un autre choc droit en 1D si la vitesse des deux chocs n'est pas la même. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. diminue la température statique. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- d. se déplace toujours à une vitesse supérieure de la vitesse du son de l'air ambiant au repos que le choc traverse. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- e. est parfois appelé choc de Mach ou disque de Mach quand il est associé à des réflexions de chocs obliques. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

5. Un choc oblique :

- a. est moins intense qu'un choc droit pour un même nombre de Mach. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- b. se nomme ainsi quand l'écoulement n'est pas perpendiculaire au choc. VRAI FAUX

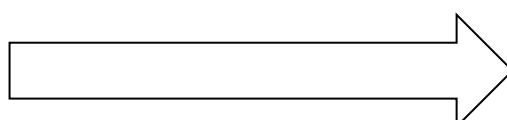
Justification/Commentaire :

- c. dévie toujours l'écoulement pour le rapprocher du choc. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- d. n'a qu'une seule solution pour un nombre de Mach donné en amont. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :



6. Un écoulement de Prandtl-Meyer:

- a. modifie la direction de l'écoulement si le nombre de Mach varie. VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

- b. est isentrope. VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

- c. détend toujours l'écoulement (réduit la pression). VRAI FAUX
Justification/Commentaire :

Examen de Mécanique des fluides compressibles – 3h

NOM :

Partie 2 : Exercices

Barème : Ex 1: 8 pts ; Ex 2 : 22 pts, Ex 3 : 34 pts

Total max : 64 pts.

Documents (formulaire, tables) distribués.

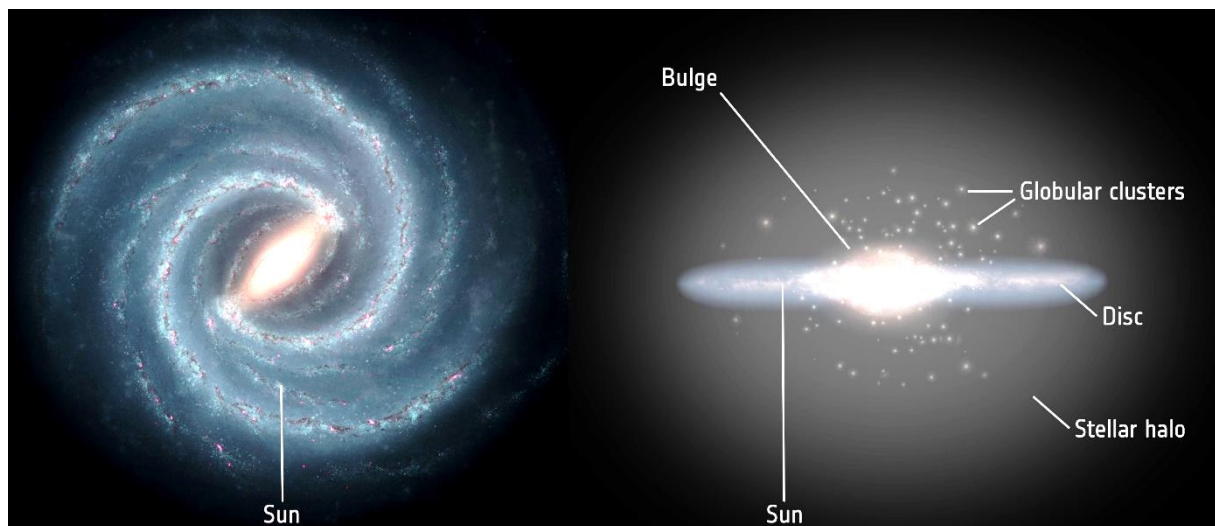
1. Galaxies & Ondes de Mach

En 1988, j'étais en 1^{ère} année de Master et j'ai eu l'occasion d'être assis sur le même banc qu'Andrea Ghez au sein d'un cours sur la dynamique des galaxies (dans une classe de seulement cinq étudiant-e-s).

Andrea a reçu le Prix Nobel en 2020 pour la découverte de l'existence d'un trou noir au centre de notre galaxie (avec Marie Curie, elle fait partie des quatre femmes ayant reçu un Prix Nobel en physique).



Notre galaxie (Milky Way ou Voie Lactée) a la forme d'un disque (figure ci-dessous). Au-delà du trou noir en son centre, notre galaxie exhibe également des bras en forme de spirale, dont une représentation est donnée à gauche sur la figure ci-dessous (NB : il ne s'agit pas d'une image prise avec un télescope, mais juste d'une représentation approximative, car nous vivons dans le disque même, d'où sont faites les mesures).



L'origine de ces formes en spirale, très communes parmi les galaxies, reste un sujet de débat scientifique depuis plus d'un siècle.

Nous allons fournir un ingrédient (parmi de nombreux autres) qui pourrait contribuer à ces bras (une idée que j'ai eue sur ce fameux banc d'école).

Outre les étoiles (soleils), le disque de la galaxie est constitué de gaz et de poussière. Les bras des spirales sont formés de gaz assez chaud ($40'000\text{ K} - 1'000'000\text{ K}$!), dont le constituant principal est l'atome d'hydrogène H , mais dénué de son électron (à cause de la température). En astronomie, cet atome d'hydrogène ionisé porte la dénomination de HII ($H - two$) et il s'agit finalement d'un proton. La température est juste une mesure de l'énergie cinétique d'agitation thermique de ces protons.

- a. Justifier le fait que, pour ce gaz de H , le rapport de chaleur spécifique ait la valeur :

$$\gamma = 1.67 = 5/3$$

On supposera que le gaz a une température $T = 200'000\text{ K}$.

- b. Trouver la vitesse du son (isentrope) dans ce gaz (la masse molaire est celle de l'hydrogène atomique H , donc 1 g/mol , car la masse de l'électron perdu est négligeable). NB : en fait à cause du rayonnement, le milieu est isotherme et la vitesse du son est généralement évaluée avec la formule *isotherme* de propagation du son (celle qu'on utilisait avant 1820) – mais on restera avec la vitesse du son isentrope.

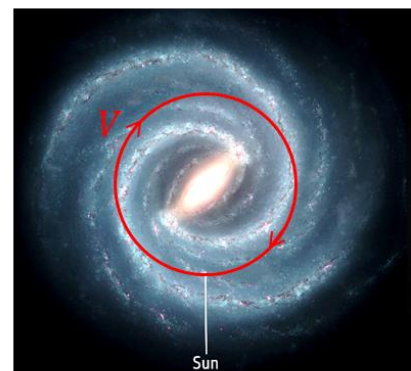
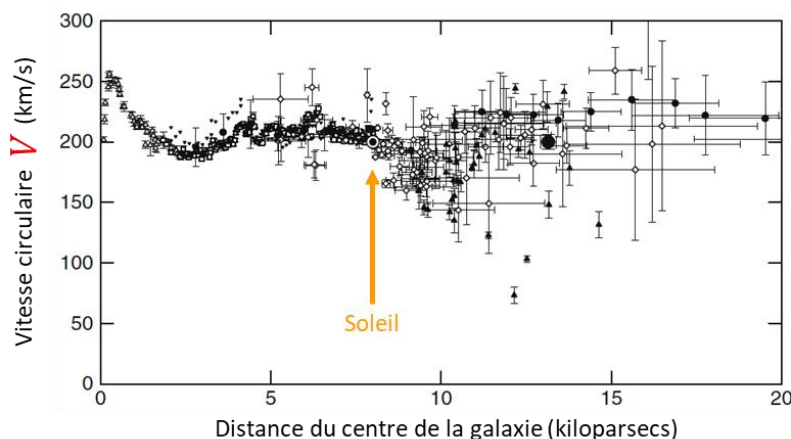
La grande majorité de galaxies (en spirale) ont la propriété que les constituants du disque (étoiles, gaz, poussière) tournent autour du trou noir sur une **orbite pratiquement circulaire** et avec **une vitesse V constante**, donc une vitesse indépendante du rayon (= distance au centre de la galaxie). On parle alors de profil de rotation plat (« flat rotation curve »). La « rotation curve » pour notre galaxie est donnée sur la figure ci-dessous.

On prendra une vitesse constante, égale approximativement à 210 km/s ($210'000\text{ m/s}$).

NB : bien comprendre qu'il ne s'agit pas d'une rotation solide, pour laquelle la vitesse serait proportionnelle au rayon (distance au centre) ; il s'agit d'une rotation différentielle, où les étoiles (et le gaz) proche du centre prennent moins de temps pour faire un tour complet.

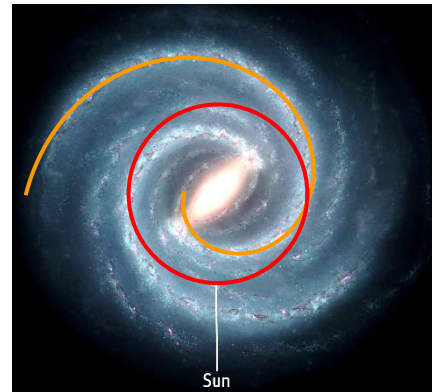
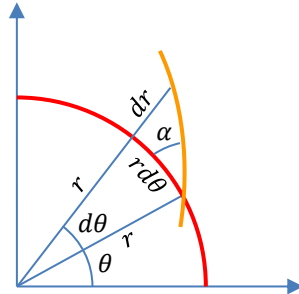
NB2 : notre soleil se trouve à peu près à 8 kiloparsecs du centre ; notre système solaire tourne donc sur une orbite circulaire autour du centre de notre galaxie avec une vitesse de 210 km/s (figure ci-dessous).

- c. Trouver le nombre de Mach approximatif de cet écoulement de gaz au niveau des spirales, là où la température est de $200'000\text{ K}$.



- d. Nous allons évaluer les ondes de Mach dans cet écoulement en rotation. Comme il s'agit d'un écoulement plan en rotation, il est pratique d'utiliser des coordonnées polaires (r, θ) . On utilisera la formule suivante, liant l'angle α d'une courbe par rapport aux trajectoires $r = \text{const.}$:

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \tan \alpha$$



- i. Montrer la relation suivante entre le nombre de Mach M et l'angle μ d'une onde de Mach par rapport à la direction d'un écoulement supersonique :

$$\tan \mu = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

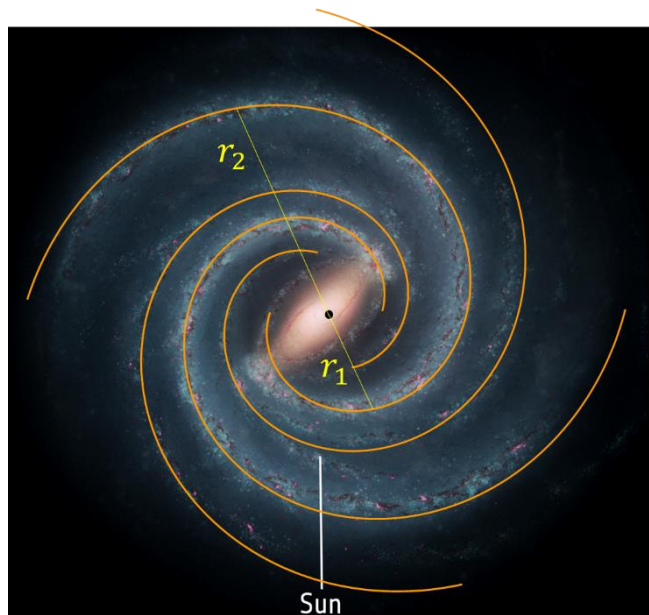
- ii. Montrer que la formule générale de la forme des ondes de Mach en coordonnées polaire pour un écoulement circulaire (c'est-à-dire selon $r = \text{const.}$) est donnée par la relation :

$$\frac{dr}{r} = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} d\theta$$

- iii. Montrer ainsi que pour un nombre de Mach constant, les ondes de Mach sont des spirales dites *logarithmiques*, d'équation :

$$\frac{r}{r_0} = e^{\frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{M^2 - 1}}}$$

- iv. Avec le nombre de Mach évalué en question c., montrer que les ondes de Mach en spirale logarithmique représentent bien les spirales de notre galaxie : on peut choisir deux points 1 et 2 sur une même spirale, diamétralement opposés, donc $\theta_2 - \theta_1 = \pi$, évaluer avec une règle r_2/r_1 , et vérifier la relation en iii.



2. Hypersonique

Début juin, la Chine a annoncé qu'elle est sur le point de rendre opérationnelle une soufflerie hypersonique (JF-22) à *Mach* 30. Avec le peu d'informations à disposition, nous allons essayer de comprendre cette soufflerie en utilisant nos connaissances d'ingénieur-e.

- a. A partir de la relation gouvernant les ondes de chocs obliques, montrer que pour un nombre de Mach très grand, cette relation est indépendante du nombre de Mach et prend la forme :

$$\tan \delta \sim \cot \theta \frac{\sin^2 \theta}{\frac{\gamma + 1}{2} - \sin^2 \theta}$$

- b. Avec un peu de manipulation algébrique, montrer que l'équation prend la forme :

$$\tan \delta \sim \frac{\tan \theta}{\frac{\gamma - 1}{2} \tan^2 \theta + \frac{\gamma + 1}{2}}$$

- c. Montrer que :

$$\tan \theta \sim \frac{1 - \sqrt{1 - (\gamma^2 - 1) \tan^2 \delta}}{(\gamma - 1) \tan \delta}$$

- d. Pour de petits angles δ , et donc θ , montrer (avec $\tan \delta \sim \delta$) :

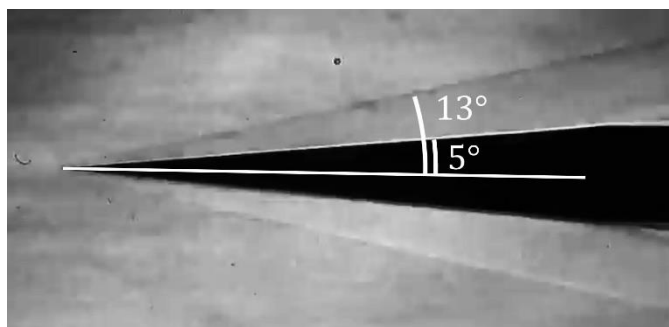
$$\theta \sim \frac{\gamma + 1}{2} \delta$$

- e. Vérifier que cette relation est bien vraie sur le diagramme des ondes de chocs obliques avec $\gamma = 1.4$ (tracer la courbe sur le diagramme).
 f. Avec ce que l'on sait sur les valeurs possibles de γ , montrer que pour de grands nombres de Mach, l'onde de choc oblique a toujours un angle plus grand que l'angle δ d'une rampe.

Dans tous les exercices (g) - (r) qui suivent, on supposera qu'il s'agit d'air considéré comme un gaz parfait avec $r = 287 \text{ J/(kg.K)}$ et $\gamma = 1.4$.

Le Von Karman Institute (VKI) en Belgique a une soufflerie hypersonique (H3). Des essais de caractérisation ont été réalisés il y a quelques semaines, et ont produit l'image ci-dessous.

- g. Trouver le nombre de Mach de la soufflerie à partir de cette image (en supposant un écoulement 2D).
 h. Evaluer la vitesse de l'écoulement dans la section d'essai avec une température totale $T_0 = 550 \text{ K}$ (dans le réservoir, qui est chauffé avec des résistances).
 i. Evaluer l'enthalpie *totale* de cette soufflerie en MJ/kg (10^6 J/kg).



Un critère qui détermine la performance d'une soufflerie hypersonique est son *enthalpie totale*. Les anciennes souffleries hypersoniques ainsi que la plupart dans les milieux académiques sont à basse enthalpie (totale), et sont faciles à réaliser, mais ne reproduisent pas des conditions réelles (rentrée atmosphérique, par exemple), contrairement aux souffleries à haute enthalpie (qui sont rares et complexes).

Ce qui différencie les souffleries à haute enthalpie des souffleries à basse enthalpie est leur *capacité à reproduire les vitesses en vol*.

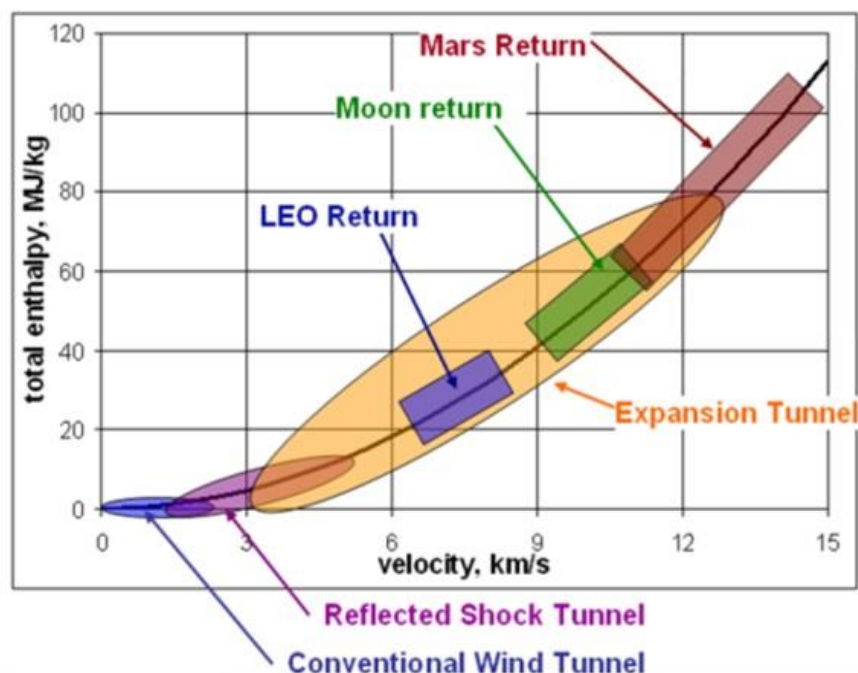
Une vitesse typique en orbite autour de la Terre (et donc de rentrée atmosphérique en Low-Earth Orbit, LEO return, voir diagramme ci-dessous) est de 28'000 km/h ou $V = 7.8 \text{ km/s}$.

- j. Dans l'expression de l'enthalpie totale, montrer que l'énergie d'agitation thermique $c_p T$ due à la température (statique), de l'ordre de quelques centaines de kelvin (on prendra 300 K), peut être largement négligée par rapport à l'énergie cinétique spécifique (par unité de masse) en orbite, et que donc l'enthalpie totale peut s'écrire :

$$h_0 \sim \frac{1}{2} V^2$$

- k. Donner la valeur de l'enthalpie totale en mégajoules par kilogramme MJ/kg pour une rentrée atmosphérique terrestre type.
- l. Donner la valeur de la température totale pour ces rentrées atmosphériques (en supposant que $\gamma = 1.4$, même si à ces températures la valeur serait différente).

Par définition, une soufflerie à haute enthalpie est une soufflerie sachant reproduire des écoulements avec des enthalpies (totales) autour de 10 – 100 MJ/kg . La soufflerie au VKI est donc une soufflerie à basse enthalpie.



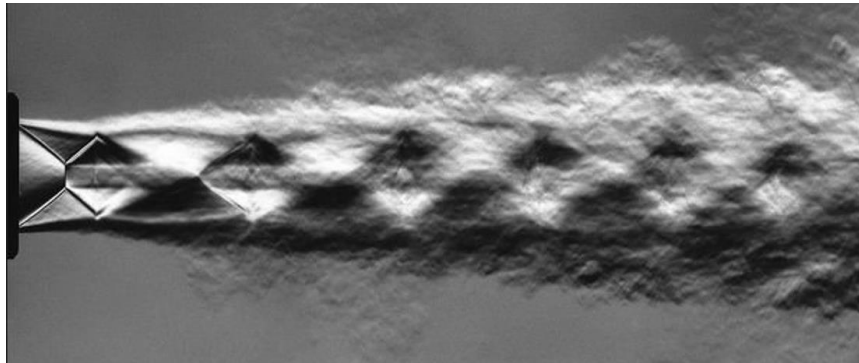
On ne sait pas grand-chose sur la soufflerie JF-22 en Chine à *Mach* 30. Les conditions de réservoir seraient générées par des ondes de détonation, et il s'agirait donc d'une soufflerie avec ondes de choc réfléchies (reflected shock tunnel) qui génèreraient des conditions de réservoir. L'écoulement se déverserait du réservoir dans **une tuyère de De Laval (convergent-divergent)**. Le diamètre de sortie du divergent serait de 2.5 m (voir photo ci-dessous). Selon les annonces, la soufflerie serait capable de générer des vitesses de $V = 10\text{ km/s}$ et de reproduire les conditions de vol à $40'000\text{ m}$ d'altitude où la densité est $\rho = 0.004\text{ kg/m}^3$ et la température est $T = -23\text{ °C}$. Elle génèrerait un jet supersonique en sortie de divergent d'une puissance égale à 85% du plus puissant barrage hydraulique au monde (Barrages des Trois Gorges, en Chine également, de 22.5 GW , équivalent à une vingtaine de centrales nucléaires). Comme déjà dit, **on supposera qu'il s'agit d'air considéré comme un gaz parfait avec $r = 287\text{ J/(kg.K)}$ et $\gamma = 1.4$.**

- m. Si on accepte la valeur *Mach* 30, montrer que la vitesse en sortie de divergent est proche de celle annoncée au point de fonctionnement.
- n. Evaluer le débit massique \dot{m} .
- o. Calculer la puissance du jet supersonique $\dot{m} \cdot V^2$ en sortie du divergent, et comparer avec la valeur annoncée.
- p. Evaluer l'enthalpie totale et la température totale. Est-ce une soufflerie à haute enthalpie ?
- q. Evaluer le diamètre du col pour ce nombre de Mach. Est-ce que cela semble raisonnable ? A votre avis, quel est le paramètre qui doit être modifié dans ces calculs pour obtenir des estimations plus justes ? Suggestion : penser à la nature du gaz à ces hautes températures dans le réservoir. Peut-il rester diatomique ou deviendrait-il monoatomique dû à la rupture des liaisons entre atomes au sein des molécules d'oxygène et d'azote ? Quelle serait la valeur correspondante de γ pour ce genre de gaz à ces températures (voir l'exercice 1. sur les galaxies) ? **Refaire une évaluation du diamètre du col avec cette nouvelle valeur de γ (voir photo ci-dessous).**
- r. Si un jour apparaît une photo d'un choc oblique autour d'un dièdre dans cette soufflerie, sera-t-il possible d'estimer le nombre de Mach comme il a été fait pour la soufflerie VKI-H3 ? Suggestion : voir exercices a - d.



3. Sillage

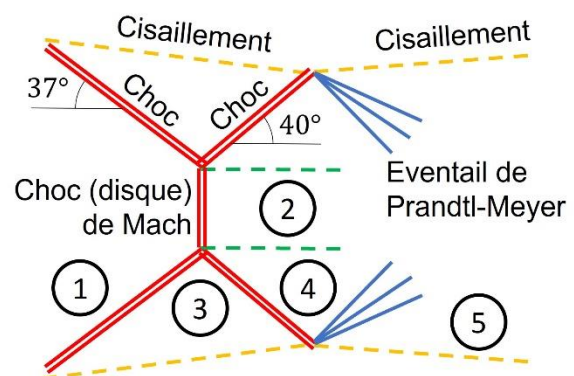
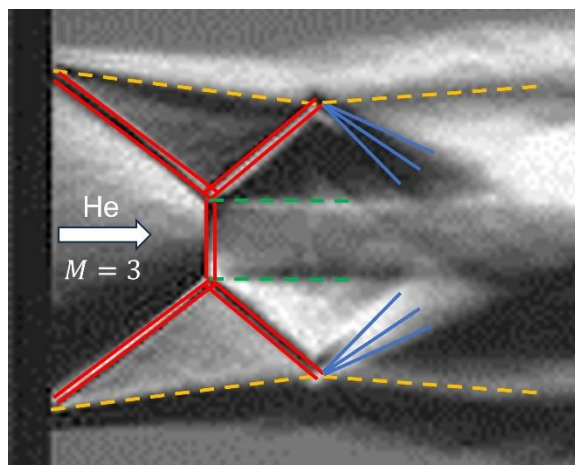
Une célèbre photo apparaît dans le livre de Milton Van Dyke « Album of Fluid Motion ».



Il s'agit d'un jet horizontal d'**hélium**, provenant de la gauche avec un nombre de Mach en sortie égal à $M = 3$. On remarquera la présence d'un disque (choc) de Mach. Les chocs obliques se réfléchissent et viennent rebondir sur la couche de cisaillement (surface libre du jet) sous forme d'éventails de Prandtl-Meyer. Leurs angles ont été mesurés sur la photo.

NB : on ne peut pas utiliser le diagramme des chocs obliques car il s'agit d'hélium.

- Trouver le nombre de Mach et la pression (par rapport à la région 1) dans la région 2.
- Une mesure sur la photo montre que le premier choc oblique forme un angle de 37° avec l'horizontale. Trouver le nombre de Mach, la direction de l'écoulement, et la pression (par rapport à la région 1) dans la région 3.
- Une mesure sur la photo montre que le choc oblique réfléchi forme un angle de 40° avec l'horizontale. Trouver le nombre de Mach, la direction de l'écoulement, et la pression (par rapport à la région 1) dans la région 4, et vérifier que les pressions dans les régions 2 et 4 sont presque identiques (à des approximations de calcul près). NB : la direction de l'écoulement dans la région 4 n'est PAS horizontale.
- Montrer qu'une onde de choc qui se « réfléchit » sur une couche de cisaillement donne naissance à un éventail de Prandtl-Meyer. Suggestion : penser en termes de pressions.
- Trouver le nombre de Mach et la direction de l'écoulement dans la région 5.



① a) Gaz de protons \Rightarrow gaz mono-atomique $\Rightarrow \gamma = 1,67$

② b) $r = \frac{R}{M} = \frac{8,314 \text{ J/K.mol}}{0,001 \text{ kg/mol}} \sim 8'314 \text{ J/kg.K}$

$$a = \sqrt{\gamma \cdot r \cdot T} = 52'696 \text{ m/s} \quad (\text{ou } 52'643 \text{ m/s} \text{ avec } \gamma = 5/3)$$

$T = 200'000 \text{ K}$

③ c) $M = \frac{V}{a} \leftarrow V = 210'000 \text{ m/s} \rightarrow M \approx 4$

④ d) i. $\sin \mu = \frac{1}{M} \quad \cos^2 \mu + \sin^2 \mu = 1$

$$\frac{1}{\tan^2 \mu} \rightarrow \frac{\cos^2 \mu}{\sin^2 \mu} + 1 = \frac{1}{\sin^2 \mu} = M^2$$
$$\Rightarrow \tan^2 \mu = \frac{1}{M^2 - 1}$$

ii. $\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \tan \mu \rightarrow \frac{dr}{r} = \tan \mu \cdot d\theta = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} d\theta$

iii. $M = \text{const.} \Rightarrow \ln r = \frac{\theta}{\sqrt{M^2 - 1}} + \text{const}$

$$r = r_0, \theta = \theta_0 \Rightarrow \text{const} = \ln r_0 - \frac{\theta_0}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

$$\Rightarrow \ln \frac{r}{r_0} = \frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{r_0} = e^{\frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{M^2 - 1}}}$$

iv. Avec une règle, vérifier $\frac{r_2}{r_1} = e^{\frac{\theta_2 - \theta_1}{\sqrt{M^2 - 1}}}$

avec par exemple $\theta_2 - \theta_1 = \pi$ (et $M = 4$)

(sinon, à la maison, tracer directement la fonction)

$$(2) (a) \tan \delta = 2 \cot \theta \frac{M_1^2 \sin^2 \theta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\theta) + 2}$$

$$\lim_{\substack{M_1 \rightarrow \infty \\ \theta \neq 0}} \frac{M_1^2 \sin^2 \theta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\theta) + 2} = \frac{\sin^2 \theta}{\gamma + \cos 2\theta}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$$

$$\rightarrow \tan \delta \sim 2 \cot \theta \frac{\sin^2 \theta}{\gamma + 1 - 2\sin^2 \theta} = \cot \theta \frac{\sin^2 \theta}{\frac{\gamma+1}{2} - \sin^2 \theta}$$

$$(b) \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \rightarrow \cot \theta \frac{\sin^2 \theta}{\frac{\gamma+1}{2} - \sin^2 \theta} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\frac{\gamma+1}{2} - \sin^2 \theta}$$

Diviser par $\cos^2 \theta$:

$$\frac{\sin \theta \cos \theta}{\frac{\gamma+1}{2} - \sin^2 \theta} = \frac{\tan \theta}{\frac{\gamma+1}{2} \frac{1}{\cos^2 \theta} - \tan^2 \theta}$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \rightarrow 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\rightarrow \tan \delta \sim \frac{\tan \theta}{\frac{\gamma+1}{2} (1 + \tan^2 \theta) - \tan^2 \theta} = \frac{\tan \theta}{\frac{\gamma-1}{2} \tan^2 \theta + \frac{\gamma+1}{2}}$$

$$(c) \left(\frac{\gamma-1}{2} \tan \delta \right) \tan^2 \theta - \tan \theta + \frac{\gamma+1}{2} \tan \delta = 0$$

$$\tan \theta = \frac{1 \pm \left[1 - 4 \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) \left(\frac{\gamma+1}{2} \right) \tan^2 \delta \right]^{1/2}}{2 \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) \tan \delta}$$

$$\tan \theta = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (\gamma^2 - 1) \tan^2 \delta}}{(\gamma - 1) \tan \delta}$$

Quand $\delta \rightarrow 0$, θ doit rester fini, donc:

$$\tan \theta = \frac{1 - \sqrt{1 - (\gamma^2 - 1) \tan^2 \delta}}{(\gamma - 1) \tan \delta}$$

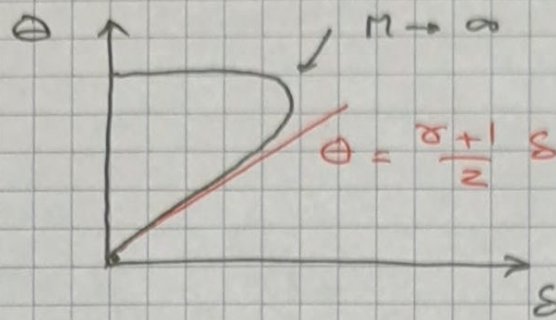
$$(d) \lim_{\delta \rightarrow 0} \sqrt{1 - (\gamma^2 - 1) \tan^2 \delta} = 1 - \frac{1}{2} (\gamma^2 - 1) \tan^2 \delta$$

$$= 1 - \frac{1}{2} (\gamma^2 - 1) \delta^2$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \tan \theta = \theta \sim \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{2}(\gamma^2 - 1)\delta^2\right)}{(\gamma - 1)\delta}$$

$$\theta \sim \frac{\gamma + 1}{2} \delta$$

- (e) Tracer directement sur le diagramme des ondes de choc oblique pour $\gamma = 1,4$



- (f) Comme $\gamma = \frac{f+2}{f}$, f : degrés de liberté des molécules

$$\lim_{f \rightarrow \infty} \gamma = 1 \quad \text{donc} \quad \gamma \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma+1}{2} \geq 1 \Rightarrow \theta \geq \delta$$

- (g) Pour $\delta = 5^\circ$ et $\theta = 13^\circ$, sur le diagramme des ondes de choc oblique (pour $\gamma = 1,4$), on peut lire : $M = 6$

- (h) Avec un écoulement isentrope du réservoir jusqu'à la section d'essai :

$$\underset{550 \text{ K}}{\overset{\uparrow}{T_0}} = T \left(1 + \underset{\gamma=1,4}{\frac{\gamma-1}{2}} \underset{M=6}{M^2} \right) \quad \text{ou} \quad \frac{T_0}{T} = 0,1220 \quad \underset{\uparrow}{\text{tables}}$$

on trouve : $T = 67,1 \text{ K}$

Vitesse du son : $a = \sqrt{\underset{1,4}{\gamma} \cdot \underset{287 \text{ J/kg.K}}{r} \cdot T} = 164,2 \text{ m/s}$

Vitesse de l'écoulement : $V = M \cdot a = 985,2 \text{ m/s}$

- (i) Enthalpie totale : $h_0 = C_p \cdot T_0$, $C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot r = 1004,5 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$
 $\Rightarrow h_0 = 0,552 \text{ MJ/kg}$

j) Pour $T \sim 300 \text{ K}$, $C_p T \sim 301'350 \text{ J/kg}$
 Pour $V \sim 7'800 \text{ m/s}$, $\frac{1}{2} V^2 \sim 30'420'000 \text{ J/kg}$

$$\Rightarrow C_p T < \frac{1}{2} V^2$$

$$\Rightarrow h_o \sim \frac{1}{2} V^2$$

k) $h_o \sim 30,42 \text{ MJ/kg}$

l) $h_o = C_p T_o \Rightarrow T_o = \frac{h_o}{C_p} = 30'582,4 \text{ K}$

m) $T = -23^\circ\text{C} = 250 \text{ K} \Rightarrow a = \sqrt{\gamma r T} = 316,9 \text{ m/s}$
 $\Rightarrow V = M \cdot a = 9'508 \text{ m/s}$ (proche de 10 km/s)
 \uparrow
 30

n) Débit massique en sortie de divergent :

$$\dot{m} = \rho \cdot V \cdot A$$

$\rho = 0,004 \text{ kg/m}^3$ aire en sortie $= \frac{\pi}{4} (2,5 \text{ m})^2 \Rightarrow \dot{m} = 186,7 \text{ kg/s}$

o) $\dot{m} \cdot V^2 = 16,88 \text{ GW}$ ($\sim 75\%$ $22,5 \text{ GW}$)

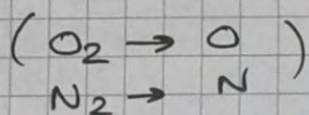
p) $h_o = C_p T + \frac{1}{2} V^2 \sim \frac{1}{2} V^2 = 45,45 \text{ MJ/kg}$
 \uparrow
 250 K \Rightarrow Soufflerie à HAUTE enthalpie

q) $\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$ $\gamma = 1,4$
 $M = 30 \Rightarrow \frac{A}{A^*} = 114'385$

$$\Rightarrow A^* = \frac{\frac{\pi}{4} (2,5 \text{ m})^2}{114'385} = 4,24 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \Rightarrow \phi^* = 7,39 \text{ mm}$$

(trop petit)

Avec $\gamma = 1,67 \Rightarrow \frac{A}{A^*} = 1'698 \Rightarrow \phi^* \approx 6 \text{ cm}$



(raisonnable)

r) Quand M est grand, les courbes θ - S sont confondues \rightarrow pas possible d'en déduire M

3 a

Tables ou formules pour choc droit:

$$M_1 = 3$$

$$\delta = 1,67 = \frac{5}{3}$$

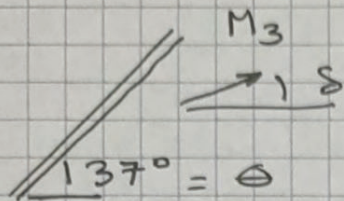
(He)

$$M_2 = 0,522$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 11$$

b

$$M_1 = 3$$



$$M_{n,1} = M_1 \cdot \sin \theta = 1,805$$

$$M_{n,3} = 0,640$$

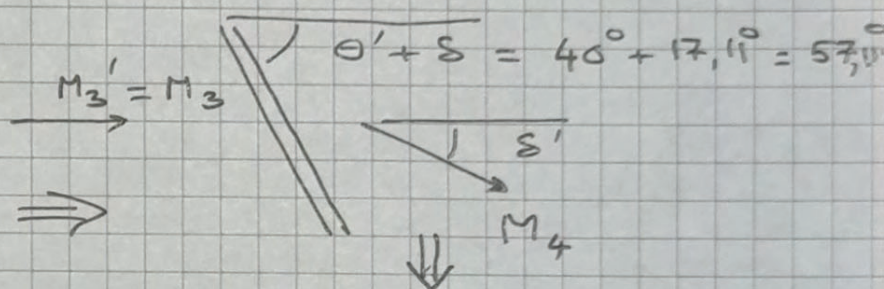
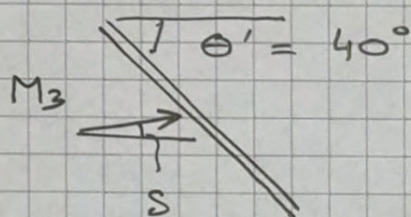
$$\frac{P_3}{P_1} = 3,825$$

Avec $\tan \delta = 2 \cot \theta \frac{M_1^2 \sin^2 \theta - 1}{M_1^2 (\delta + \cos 2\theta) + 2} \Rightarrow \delta = 17,11^\circ$

on ne peut pas utiliser le graphique

$$M_3 = \frac{M_{n,3}}{\sin(\theta - \delta)} = 1,880$$

c



$$M_{n,3} = M_3 \sin(\theta' + \delta) = 1,579$$

$$M_{n,4} = 0,692$$

$$\frac{P_4}{P_3} = 2,866$$

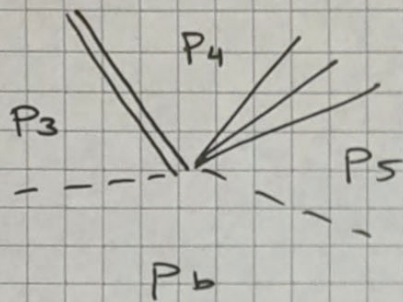
$$\delta' = 16,69^\circ$$

$$M_4 = 1,067$$

$$\delta - \delta' = 17,11^\circ - 16,69^\circ = 0,42^\circ$$

$$\frac{P_4}{P_1} = \frac{P_4}{P_3} \cdot \frac{P_3}{P_1} = 10,96 \text{ proche de } \frac{P_2}{P_1} = 11$$

(d)



$$P_3 = P_b$$

$$P_4 > P_3 = P_b$$

→ il faut une détente pour diminuer la pression de sorte que :

$$P_5 = P_b$$

(e) $\nu(M_4) = 0,675$

↑ $M_4 = 1,067$

Fonction
Prandtl-Meyer
avec formule
et $\gamma = 5/3$

La pression totale dans les zones (4) et (5) est la même (P_0) car isentrope

Il faut trouver M_5 (afin d'évaluer $\nu(M_5)$).

Or :
$$\frac{P_5}{P_0} = \frac{P_4}{P_0} \cdot \frac{1}{P_4/P_3} \cdot \frac{1}{P_3/P_1} \cdot \frac{P_5}{P_1}$$

$= \frac{P_3}{P_1}$ car $P_3 = P_5$

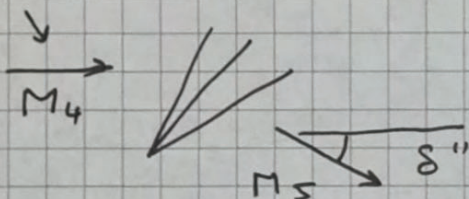
A partir de $M_4 = 1,067$

$$\frac{P_4}{P_0} = 0,447 \quad (\text{tables ou formules isentropes})$$

$$\Rightarrow \frac{P_5}{P_0} = 0,156 \quad \Rightarrow M_5 = 1,819$$

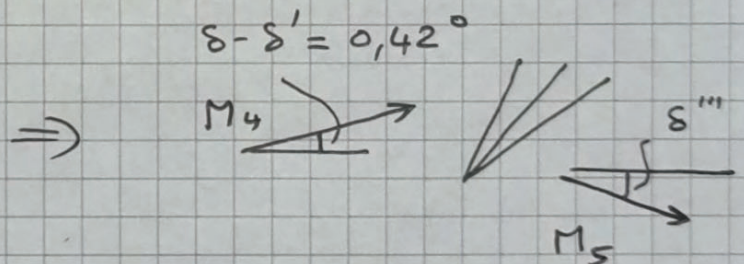
$$\Rightarrow \nu(M_5) = 17,79^\circ$$

horizontal



$$\delta'' = \nu(M_5) - \nu(M_4)$$

$$= 17,12^\circ$$



$$\Rightarrow \delta''' = \delta'' - (\delta - \delta')$$

$$= 16,70^\circ$$